数理解析研究所講究録
第1867巻 2013年 158-165

相似に関する一考察

奈良教育大学数学教室　花木 良 (Hanaki Ryo)
Department of Mathematics
Nara University of Education

1　はじめに

学校数学において,「解けるのにわからない」という問題がある. これは, 生徒は与えられた問題を解くことはできるが, 解き方の正当性を示すことができなかったり, わかった気がしなかったりする問題である. この原因の一つは, 数学として論理的に説明をせず直観に頼ったり, 帰納的推論に留まった議論で定理を認めたり, どれが公理の扱いでありどれが定理の扱いなのかが曖昧であったりすることにあると考える. さらに, そのことを教える教師が認識してないことにも問題があると考える. 例えば, 数学的帰納法は, ペアノの公理を根拠にして正当性が示されているが, 高等学校の教科書にはそのような記述がない. 本論文では, 相似について, 学校数学の問題点と解消法と数学的背景を紹介する.

2　学校数学における相似

この章では, 以前より指摘されている相似の定義の問題点を振り返り, 現行の教科書における相似について考察する.

2.1　相似の定義の問題点

相似の学習における定義の問題点は, 以前から指摘されている. [4] の p.71 には,『相似にも種々の定義がある. たとえば相似形は「形が全く同じ図形」,「同じ割合で拡大縮小すれば重なる図形」,「相似の位置におくことができる図形」などさまざまなものが用いられる. しかし, これらには, それぞれ長所・短所がある. 第1の定義は, 一見わかりよく算数科などでは用いてよいとしても,「形が同じ」ということは,「相似」ということばをいいかえただけで真の定義になっていないし, 論証の根拠とするのに適していない. また, 第2の定義では同じ割合で拡大縮小」といっても角の大きさの不変のことを付け加えておかなければ正しい定義ではない[1]. また, 第3の定義では,「相似の位置」についての定義がさらに必要になり, しかもその相似の位置の定義は決してやさしくない.』と指摘している.

中学校では, 相似の学習は論証指導の一部であることから, 曖昧なものは好まれない. 一方で, やさしくないものも生徒の実態を考えると実際的ではない.

[1] 3.1 で論じる数学的背景から, 図形のどの2点間の距離も同じ割合で拡大縮小されているならば, 角の大きさは不変になる. しかし, 四角形の辺の長さが同じ割合で拡大縮小しているだけでは, 一般に相似とはいえない.

2.2 学校数学における相似の定義と相似な図形の性質

小学校6年生では，中学校で学習する素地として，拡大と縮小を学習する．小学校の教科書では，いろいろな縦と横の比の図を見せ，形が同じで大きさが違う図形について考えようという展開で，長さと角を測り，『対応する角の大きさがそれぞれ等しく，対応する辺の長さの比がすべて等しくなるようにのばした図を**拡大図**といい，縮めた図を**縮図**といいます.』と定義をしている．

中学校3年生では，相似について学習する．その中で，三角形の相似条件を学習する．中学校の教科書では，『ある図形を拡大または縮小した図形と合同な図形は，もとの図形と相似であるという.』や『1つの図形を，形を変えずに一定の割合に拡大，または縮小して得られる図形は，もとの図形と相似であるという.』という形で，拡大と縮小を使って，相似を定義している．そして，帰納的推論により，

相似な図形の性質

1. 対応する線分の比はすべて等しい
2. 対応する角はそれぞれ等しい

を導いている[2]．すなわち演繹的には導いていない．

多角形に対しては，相似な図形の性質は相似であることの必要十分条件になっている．

2.3 三角形の相似条件

学校数学では，相似な図形の性質を認めた上で，三角形の相似条件を学習する．そして，それは以下の流れで，同一法を用いて示される．

「三角形 ABC と ABC の辺の長さが2倍の三角形 DEF が与えられたとき，これらは相似であるか」という問いがある．このとき，ABC を2倍に拡大し，$A'B'C'$ を作る．相似な図形の性質より，

$$2AB = A'B',\ 2BC = B'C',\ 2CA = C'A',\quad \angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C'$$

が成り立つ．$A'B' = DE, B'C' = EF, C'A' = FD$ より，3辺相等なので，$\triangle A'B'C' \equiv \triangle DEF$ である．したがって，三角形 DEF は三角形 ABC を拡大した図形になっているので，相似である．図1を参照.

3 相似についての数学的背景

この章では，相似の数学的定義と，そこから導かれるものをみる．また，相似を用いない平行線の性質と線分の比の証明方法を示し，これにより，相似な図形の性質が導かれることをみる．加えて，座標平面上で考えることによって，平行線の性質と線分の比が導かれることも紹介する．

[2]もう少し強い条件として,「対応する線分」を「対応する部分の長さ」と書いてある教科書もある [6].

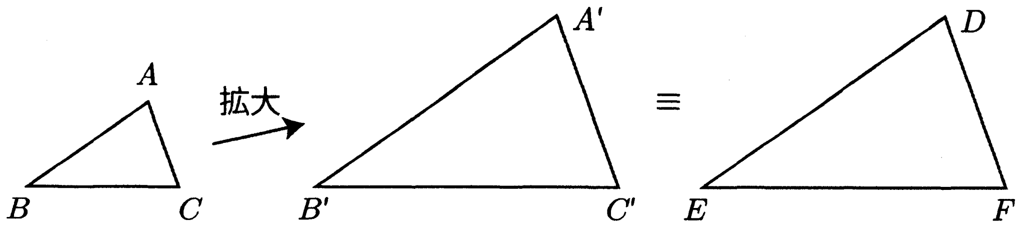

図 1: 三角形の相似条件

3.1 相似の数学的定義

平面上にある図形を考えるとき，拡大縮小は，以下のような写像で定義される．

$$\eta_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y) \to (kx, ky)$$

そして，$k > 1$ のとき**拡大**，$0 < k < 1$ のとき**縮小**と呼ぶ．これは

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

による1次変換である．拡大，縮小では，原点は原点に移動する．

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の平行移動，回転，鏡映，拡大，縮小，および，それらの合成写像を**相似変換**という．平面上にある図形 A, B が**相似**であるとは，$f(A) = B$ となる相似変換が存在するときをいう．

一方，$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が，任意の2点 (P, Q) の距離を $k(> 0)$ 倍するとき，すなわち，

$$kPQ = f(P)f(Q)$$

を満たすとき，f を**比例写像**という．次の定理から，P を固定した（$f(P) = P$）比例写像の像は，P を相似の中心とした相似の位置にある．

定理 1 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とする．このとき，f が比例写像であるための必要十分条件は，f が相似変換であることである．

また，任意の2点の距離が k 倍されるなら，図形の角度が保たれることも示される．四角形の場合，破線のような長さも k 倍されていることが保証されれば，対応する角は等しいことがいえる（図2）．

この事実から，任意の2点の距離が k 倍されているのならば，相似（拡大縮小）された図形になっているといえる．学校数学における相似な図形の性質1が『対応する2点間の距離の比はすべて等しい.』であれば，性質2は性質1から導かれ，さらに，これは相似な図形であるための必要十分条件になる．

3.2 相似の位置にある相似な図形の性質の証明

相似の位置にある相似な図形に対して，相似な図形の性質を示す方法を紹介する．

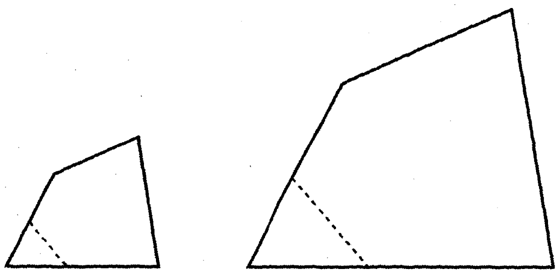

図 2: 四角形

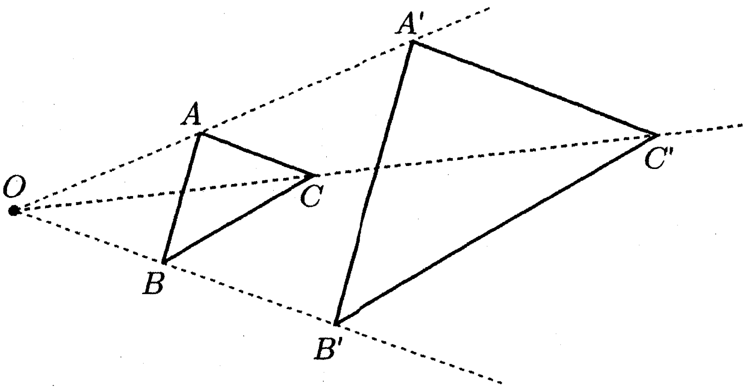

図 3: 相似の位置にある図形

3.2.1 平行線と線分の比を用いる方法

次の定理が成り立つことを示せば，相似の位置にある相似な図形の性質を証明することができる．学校数学では，この定理は「平行線と線分の比」という単元で扱われ，相似を用いて示されている．つまり，学校数学では相似な図形の性質を認め，三角形の相似条件を示し，平行線と線分の比を示している．

定理 2 図 4 の三角形 OAB, $OA'B'$ がある．このとき，

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$$

ならば，

$$\frac{AB}{A'B'}=k, AB//A'B'$$

が成り立つ．

定理の証明を同一法で行う．そのために，逆を示す．

定理 3 図 4 の三角形 OAB, $OA'B'$ がある．このとき，

$$AB//A'B'$$

ならば，

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

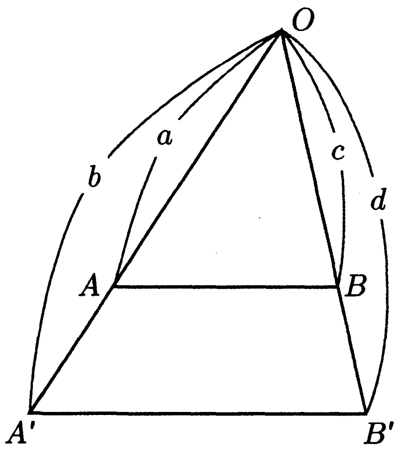

図 4:

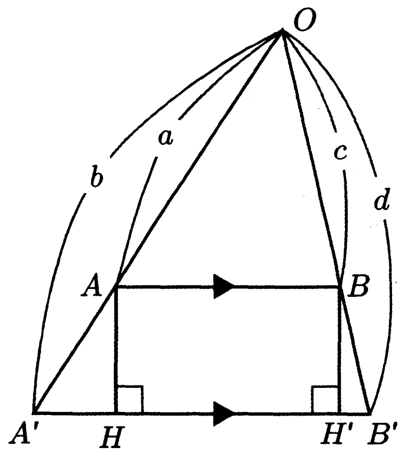

図 5: 垂線を下ろす

が成り立つ.

証明.

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{\triangle OAB}{\triangle A'AB}, \quad \frac{OB}{BB'} = \frac{\triangle OBA}{\triangle B'BA}$$

である．A, B からそれぞれ垂線を下ろし，直線 $A'B'$ との交点を H, H' とする（図 5）．$AB//A'B'$ より，$AH = BH'$ である．よって，

$$\triangle A'AB = \triangle B'BA$$

したがって，

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \ \square$$

補題 4 図 4 の三角形 OAB, $OA'B'$ がある．このとき，

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

ならば，

$$AB//A'B'$$

が成り立つ.

証明. A から平行な線分を OB' にひき，その交点を C とする（図 6）．定理 3 より，

$$\frac{a}{b} = \frac{OC}{OB'}$$

である．このような点は，OB' 上に 1 つしかないので，C は B と一致する．$\square$

補題 5 図 4 の三角形 OAB, $OA'B'$ がある．このとき，

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k, AB//A'B'$$

ならば，

$$\frac{AB}{A'B'} = k$$

が成り立つ.

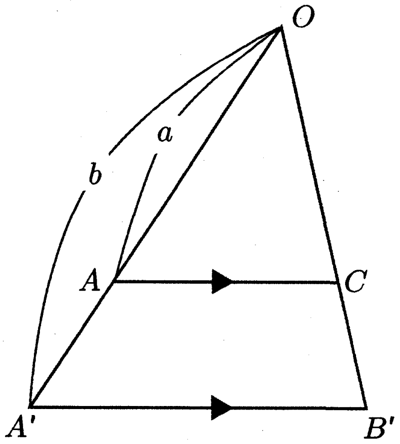

図 6:

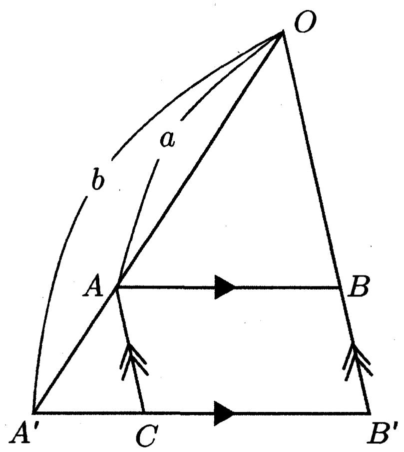

図 7:

証明. BB' と平行な線分を点 A からひき，$A'B'$ との交点を C とおく．定理3より，

$$A'O : AO = A'B' : CB'$$

であり，四角形 $ABB'C$ は平行四辺形なので，$AB = CB'$ であるので，

$$A'O : AO = A'B' : AB. \ \square$$

3.2.2 座標平面上においた図形を用いる方法

図形が $\mathbb{R}^2$ 上にあるとする．数学的には

$$\eta_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y) \to (kx, ky)$$

とし，変換をする．すなわち，原点 O を中心とする相似の位置を考える（図8）．

$$(3,2) \to (9,6), \quad (2,-1) \to (6,-3), \quad (4,0) \to (12,0)$$

である．

相似な図形の性質「2. 角が等しい」は，各線分が平行であることを示せばよい．線分の傾きを見ればよく，$AB//A'B'$ は，

$$\frac{2-(-1)}{3-2} = \frac{6-(-3)}{9-6}$$

であることからわかる．一般に k 倍の場合，

$$(a,b) \to (ka,kb), \quad (c,d) \to (kc,kd)$$

であり，

$$\frac{b-d}{a-c} = \frac{kb-kd}{ka-kc}$$

であるので，傾きが等しくなることがわかる．

相似な図形の性質「1. 線分の長さの比が等しい」は，三平方の定理を用いて，

$$k\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} = \sqrt{k^2(a-c)^2+k^2(b-d)^2} = \sqrt{(ka-kc)^2+(kb-kd)^2}$$

であることからわかる．

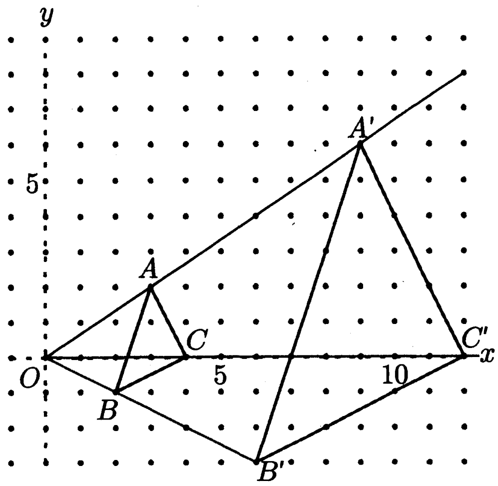

図 8: xy 平面上にある相似の位置にある図形

4 おわりに

以前は，主体的に行える拡大縮小はコピー機で行うくらいしかなかった．しかし，最近では，スマートフォンの「ピンチインピンチアウト」で主体的に相似変換をしていたり，テレビやパソコンの中で見たりすることも多い．また，この操作は 2 本の指の中心を相似の中心に行っていると思われる．

このような時代背景を考えると，相似の位置で，相似を定義してもよいのではないかと思う．本論文で紹介した同一法を用いて，平行線と線分の比を導くことは一般の中学生にとっては難しいであろうが，明確な定義により演繹的に説明をすることも可能となる．

教科書の中には，どの円も相似であるという内容を扱っているものもあり，これも相似の位置による相似の定義によって論証が可能になる．相似の位置による相似の定義によって，どの放物線（2 次関数のグラフ）も相似であること，どの反比例のグラフも相似であることも示すことができる．

参考文献

[1] 石谷 茂著，論証の新しい指導，明治図書，1959.

[2] 大田 春外著，高校と大学をむすぶ幾何学，日本評論社，2010.

[3] 清宮 俊雄著，エレガントな問題をつくる—初等幾何発見的方法，日本評論社，2005.

[4] 戸田 清・和田 義信監修，中学校数学指導実例講座 図形の指導，金子書房，1960.

[5] 一松 信・岡田 よし雄・町田 彰一郎ほか 30 名，中学校数学 3，学校図書，2012.

[6] 藤井 斉亮・俣野 博ほか 39 名，新しい数学 3，東京書籍，2012.

[7] 岡本 和夫・小関 熙純・森杉 馨・佐々木 武ほか 39 名，未来へひろがる 数学 3，啓林館，2012.

[8] 重松　敬一ほか 24 名，中学数学 3，日本文教出版，2012.

[9] 相馬 一彦ほか 17 名，数学の世界 3，大日本図書，2012.

[10] 岡部 恒治ほか 14 名，中学校数学３，数研出版，2012.

[11] 澤田 利夫・坂井 裕ほか 22 名，数学の世界３，教育出版，2012.

[12] 藤井 斉亮・飯高 茂ほか 40 名，新しい算数６上，東京書籍，2012.

[13] 小山 正孝・中原 忠男ほか，小学算数６年生下，日本文教出版，2012.